

CÁLCULO I

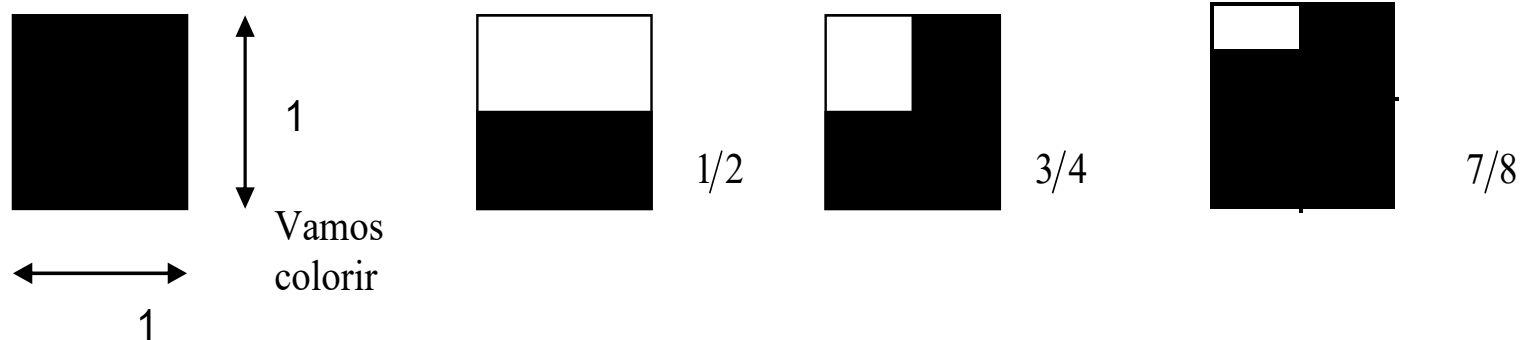
AULA 2

DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

LIMITE

1. IDÉIA INTUITIVA DE LIMITE

I) Considere uma figura de forma quadrada de área igual a 1:

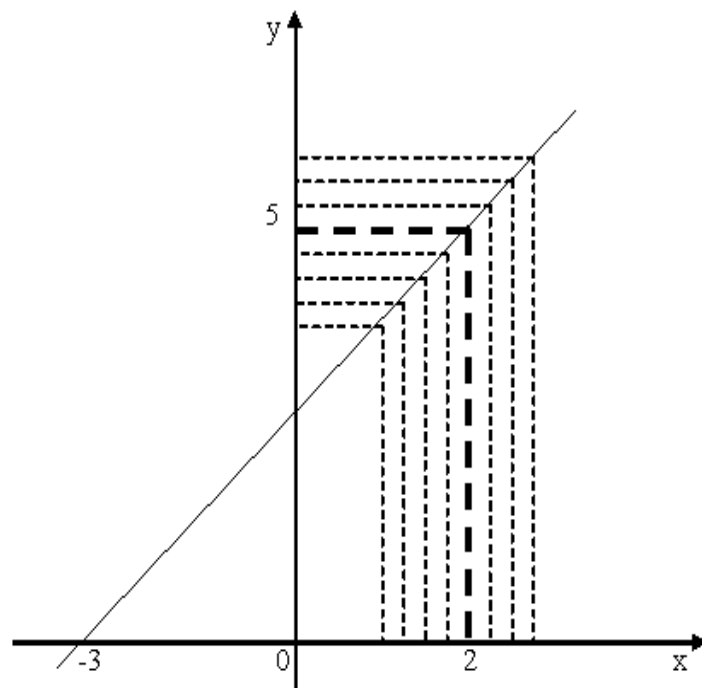


Observações:

a) Continuando esse processo sucessivamente e indefinidamente, a região colorida vai preenchendo quase todo o quadrado inicial, isto é, a área vai se aproximando de 1, ou seja, vai tendendo a 1 : $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{15}{16}$; $\frac{31}{32}$; $\frac{63}{64}$

b) Quando dizemos que a área da região colorida tende a 1, significa que ela se aproxima de 1, sem no entanto assumir esse valor.

II) Observe o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 3$



Notamos que, para valores de x cada vez mais próximo de 2, temos valores de $f(x)$ cada vez mais próximos de 5. Isso ocorre tanto quando x tende a 2 pela esquerda, isto é, se aproxima por valores menores que 2, como x tende a 2 pela direita, isto é, se aproxima por valores maiores que 2.

A notação fica;

- a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} x + 3 = 5$, lê-se: o limite de $f(x)$, quando x tende a 2 pela esquerda, é igual a 5.
- b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} x + 3 = 5$, lê-se: o limite de $f(x)$, quando x tende a 2 pela direita, é igual a 5.
- c) Os limites à esquerda e à direita são chamados de limites laterais
- d) Por isso, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a 2, é 5
- e) Em símbolos: $\lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = 5$

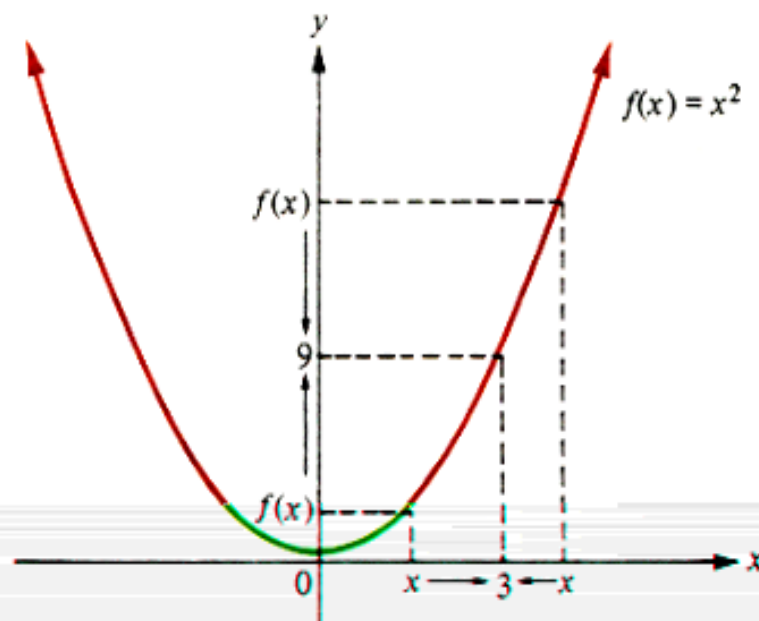
2. NOTAÇÃO DE LIMITE

Se f é uma função e a um número, a notação:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Entende-se como “o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L ”, isto é, $f(x)$ se aproxima do número L quando x se aproxima de a .

Exemplo 1: $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$



Exemplo 2: Considere o problema de determinar o limite de $f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2}$ para $x \rightarrow 2$:

Esta função está definida $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$. Isto significa que não podemos estabelecer uma imagem quando x assume o valor 2.

$$f(2) = \frac{3(2)^2 - 4(2) - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0} ???$$

Obs: $\frac{0}{0}$ simboliza uma **indeterminação matemática**.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2} = ?$$

Como a variável x não pode assumir o valor 2 na função f , vamos estudar o comportamento desta função quando x está *muito próximo* de 2, em outras palavras, queremos responder a seguinte pergunta:

Qual o comportamento da função f quando x assume valores muito próximos (ou numa vizinhança) de 2, porém diferentes de 2?

Tabelas de aproximações

As tabelas de aproximação são utilizadas para aproximar o valor da imagem de uma função (se existir) quando a variável x se aproxima de um determinado ponto.

Atribuindo a x valores próximos de 2, porém **menores** (pela esquerda) do que 2: (tabela A)

x	1	1,25	1,50	1,75	1,90	1,99	1,999
$f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2}$	5	5,75	6,50	7,25	7,70	7,97	7,997

($x < 2$)

Atribuindo a x valores próximos de 2, porém **maiores** (pela direita) do que 2: (tabela B)

x	3	2,75	2,50	2,25	2,10	2,01	2,001
$f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2}$	11	10,25	9,50	8,75	8,30	8,03	8,003

($x > 2$)

Observe que podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 8 quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos x suficientemente próximo de 2. De outra forma, convencionaremos:

“O limite da função $f(x)$ quando x se aproxima de (tende a) 2 é igual a 8”.

Evidentemente

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2} = 8$$

Será necessário sempre construir *tabelas de aproximações* para determinar o limite de uma função, caso ele exista?

Não! Há uma forma bem mais simples, como veremos a seguir.

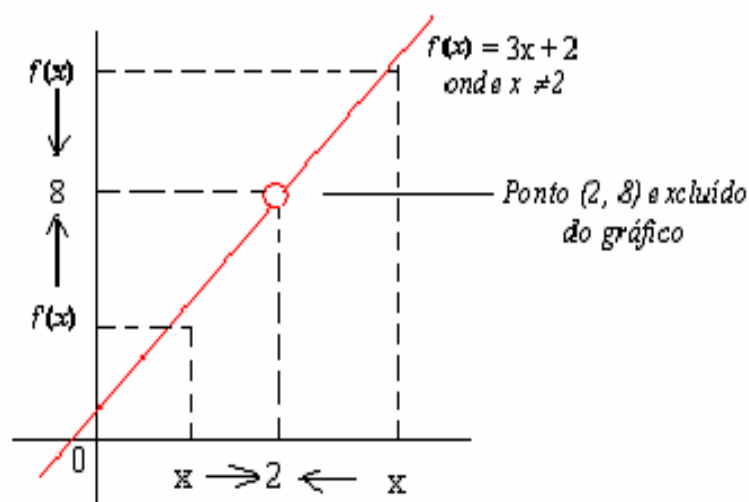
3. CÁLCULO DE LIMITES QUANDO O NUMERADOR E DENOMINADOR TENDEM A ZERO

$$\left(\frac{0}{0}\right)$$

Para simplificar a expressão você deve utilizar fatoração, conjugado de radical, dispositivo prático de *Briot-Ruffini* para dividir polinômios, etc... antes de efetuarmos a substituição.

Eliminação da indeterminação

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x + 2)(x - 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} 3x + 2 = 8$$



Exemplo 3: Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

Solução

Observe que $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$ não é definida para $x = 2$, e o numerador e denominador da fração tendem a zero quando x se aproxima de 2.

Multiplicando o numerador e o denominador da fração pelo conjugado do denominador:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5})^2 - 3^2} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2+5-9} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2+5}+3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}\end{aligned}$$

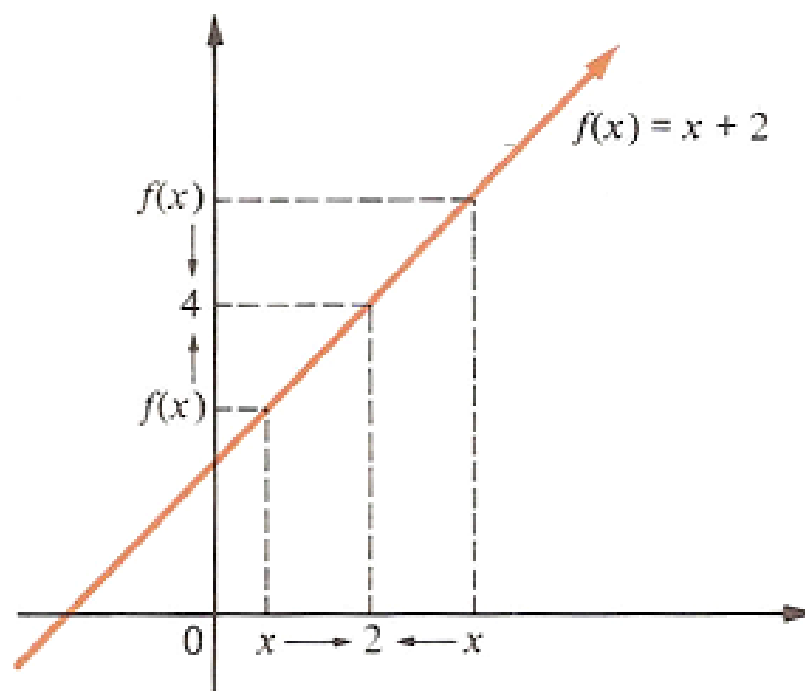
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{x+2} = \frac{\sqrt{2^2+5}+3}{2+2} = \frac{3}{2}$$

Na determinação do limite de $f(x)$, quando x tende para a , não interessa como f está definido em a (nem mesmo se f está realmente definido). A única coisa que interessa é como f está definido para valores de x na vizinhança de a . De fato, podemos distinguir três casos possíveis como segue:

Caso 1 - f está definida em a e $f(a) = L$

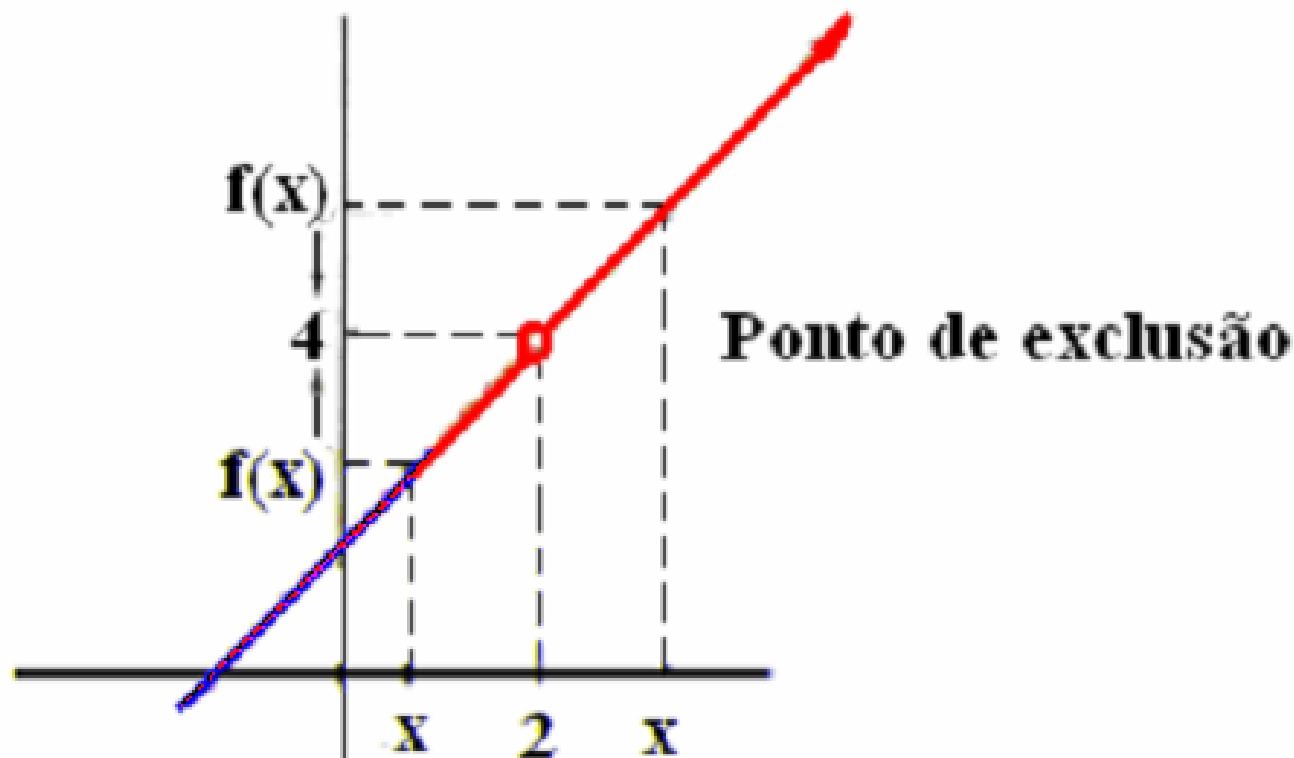
Ex: $\lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$

Aqui, f está definida em 2 e $f(2) = 4$. Quando x tende a 2, $x + 2$, claramente tende a 4, então $\lim f(x) = 4$. O mesmo valor que a função f assume em $x = 2$.



Caso 2 - f não está definida em a

$$\text{Ex. } f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = x + 2$$

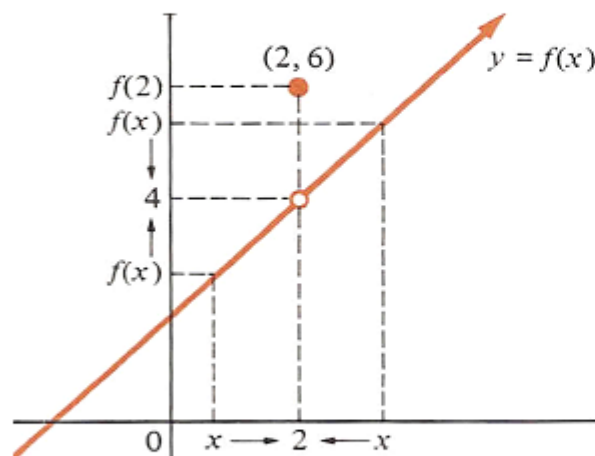


Aqui, f não está definida em 2, mas para $x \neq 2$

Caso 3 - f está definida em a e $f(a) \neq L$

$$\text{Ex: } f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \neq 2 \\ 6 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4 \qquad f(2) = 6$$



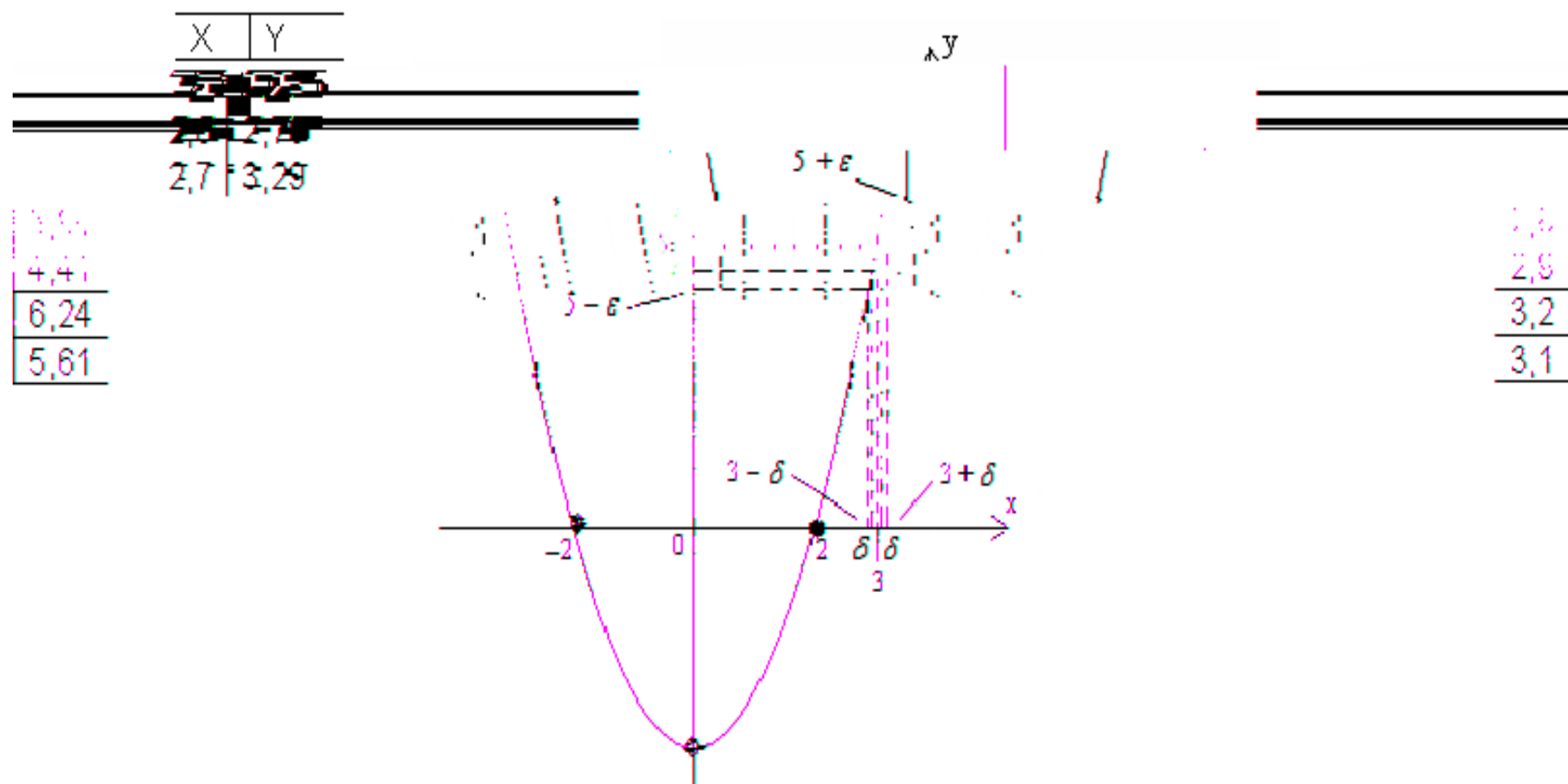
Aqui, o limite de $f(x)$ quando x tende a dois não é o mesmo que o valor da função em $x = 2$

Dizemos que a função é contínua em $x = 2$ no caso 1, e não é contínua em $x = 2$ no caso 2 e no caso 3.

“Nos três casos existe limite, mesmo a função não sendo contínua no caso 2 e 3. Para existir limite, basta que os limites laterais sejam iguais”

Obs: Na aula 3 falaremos em continuidade e limites laterais com mais profundidade

Exemplo 4: Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 4$ e o seu gráfico:

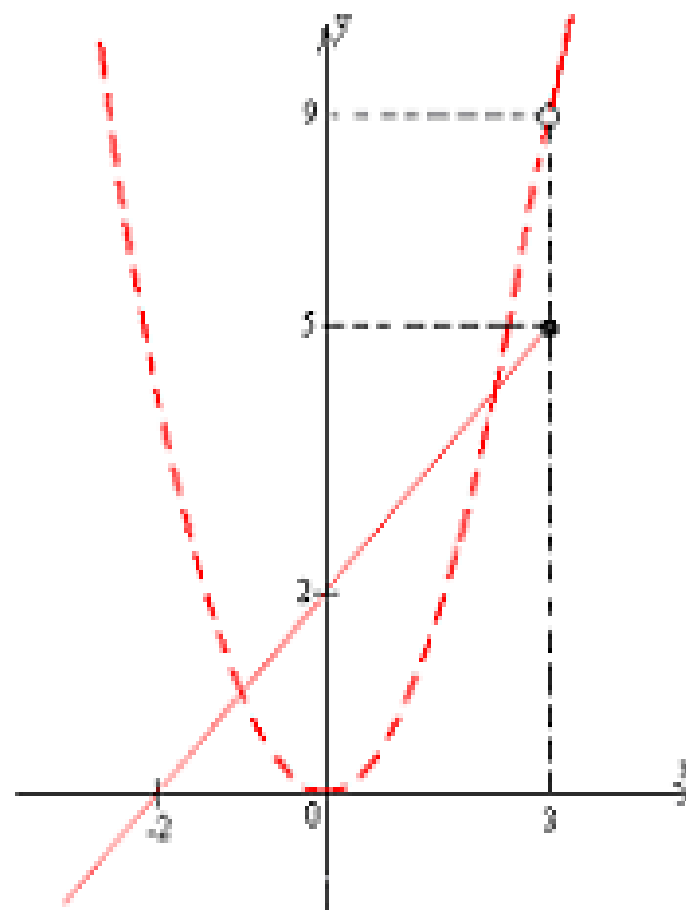


ção: Sendo que o domínio de $f(x)$ é conjunto dos números reais, que $f(3) = 5$ e que os valores de y se aproximam de 5, conforme mostra a tabela, para valores de x próximos de 3, então $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$

Observação: $f(x)$ se aproxima de 5

Exemplo 5: Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x > 3 \\ x+2, & \text{se } x \leq 3 \end{cases}$

X	Y
2,7	4,7
2,8	4,8
2,9	4,9
3,3	10,89
3,2	10,24
3,1	9,61



Observação:

a) Quando x tende a 3, com valores menores de 3, ou seja, pela esquerda, o limite é 5.

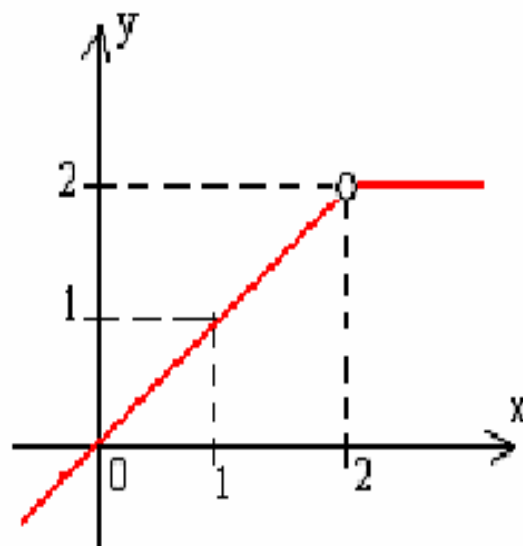
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5$$

b) Quando x tende a 3, com valores maiores de 3, ou seja, pela direita, o limite é 9.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 9$$

c) Neste caso, não existe o limite de $f(x)$ quando x tende a 3, embora $f(x)$ seja definida para $x = 3$. Para que o limite de $f(x)$ exista, é necessário que $f(x)$ se aproxime de um mesmo número, seja pela esquerda ou pela direita.

Exemplo 6: Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 2 \\ 2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$



Observação:

a) Quando x tende a 2 para valores menores que 2, isto é, pela esquerda, o limite de $f(x)$ é 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$$

b) Quando x tende a 2 para valores maiores que 2, isto é, pela direita, o limite de $f(x)$ é 2. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$

4. PROPRIEDADES BÁSICAS DOS LIMITES DE FUNÇÕES

Suponha que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então:

1) Limite da Soma e da Diferença

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M$$

2) Limite de uma constante multiplicada por uma função

$$\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL \quad (c \text{ é uma constante qualquer})$$

3) Limite do produto

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right] = L \cdot M$$

4) Limite do quociente

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) : g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$$

5) Limite de uma potência

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n \quad (n \text{ é um inteiro positivo qualquer})$$

6) Limite de uma raiz

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L} \quad \text{se } L \geq 0 \text{ e } n \text{ é um inteiro positivo par, ou se } L \leq 0 \text{ e } n \text{ é um inteiro positivo ímpar.}$$

7) Limite de uma função modular

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |L|$$

8) Limite de uma constante

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c \quad (c \text{ é uma constante qualquer})$$

9) Limite de uma função polinomial

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

10) Limite do logaritmo

$$\lim_{x \rightarrow a} \log_b f(x) = \log_b \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ com } 0 < b \neq 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$$

11)

Se h é uma função tal que $h(x) = f(x)$ é válido para todos os valores de x pertencentes a algum intervalo ao redor de a , excluindo o valor $x = a$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Considerações Finais

O limite de uma função é usado para estudar o comportamento da função próximo de um ponto que, muitas vezes, não pertence ao domínio da função.

Na aula de hoje formalizamos o conceito de limite de uma função. Vimos também alguns exemplos de como mostramos que o limite de uma função $f(x)$ quando x tende a a é L e como podemos usar suas propriedades!

Exercícios:

1) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 3}{x + 2}$

Resp.: $-\frac{1}{3}$

2) Calcular os limites

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 4)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 1}{1 - 2x}$

Resp.: a) -2, b) -1, c) 3, d) 8

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4)$

3) Determine:

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} 7$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 + x)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} (x^4 - x^3 + x^2 + 1)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} (x - 1) \cdot (4 - x)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 5x + 4}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3}{x + 1}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[4]{81x^4}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x})$$

Resp.: a) 7, b) 2/3, c) 42, d) 1, e) 2,
f) 1/3, g) 27, h) 3, i) $2 - \sqrt{2}$

4) Dada a função $f(x) = \frac{5x^3 - 6x^2 + 3x}{x^3 - x^2 + 3x}$, calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow +1} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Resp.: a) 2/3, b) 14/5, c) 11/5

5) Calcule os limites abaixo:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{2 + x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{5x - 5}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{8 + x^3}{4 - x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{8 - x^3}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

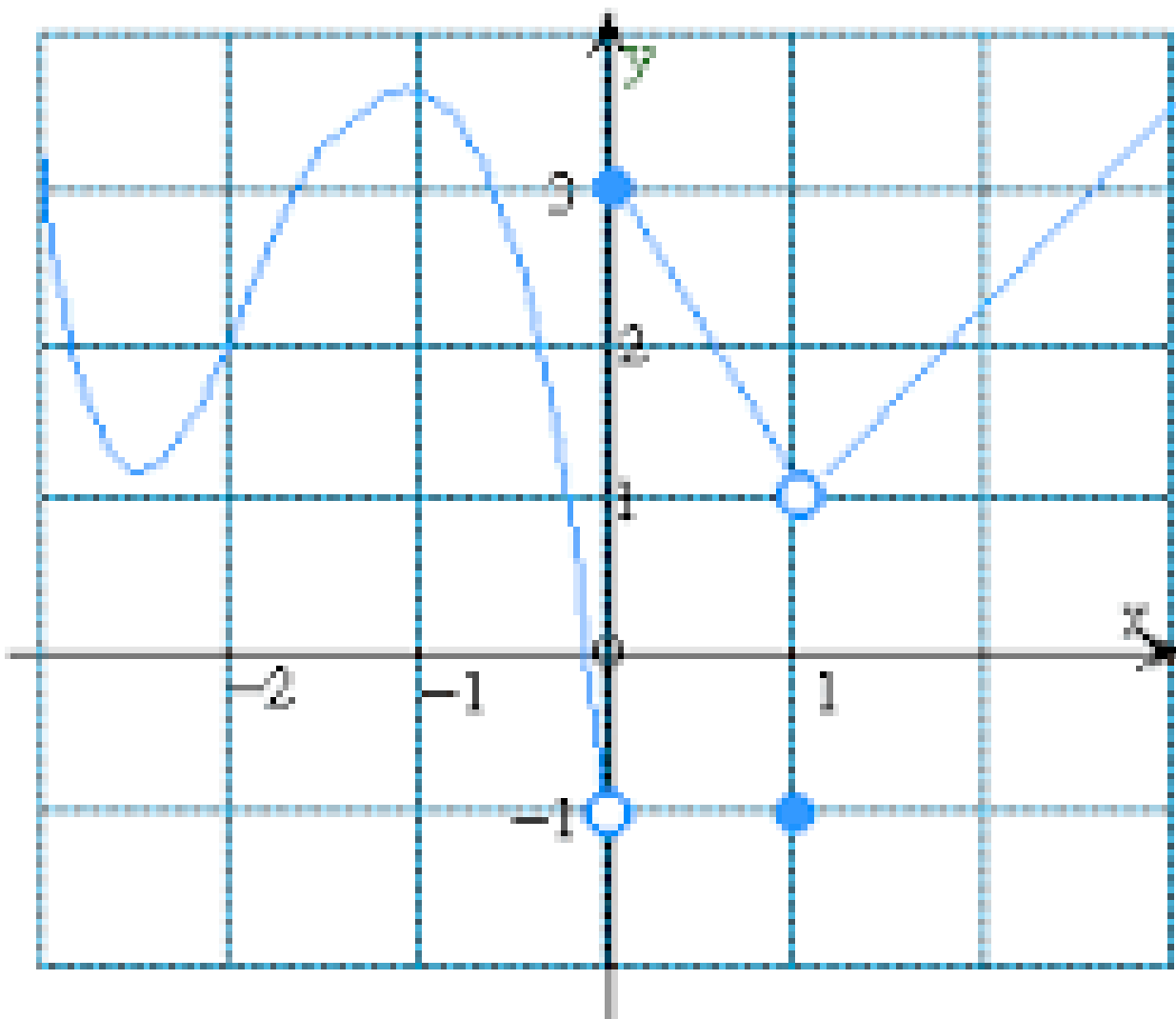
g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - x^2}{x + \sqrt{2 + x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

i) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}$

Resp.: a) 4, b) 2/5, c) 3/5, d) 3, e) -8/3, f) 1/2, g) 4/3, h) -1/56, i) -1/3

6)



Determine:

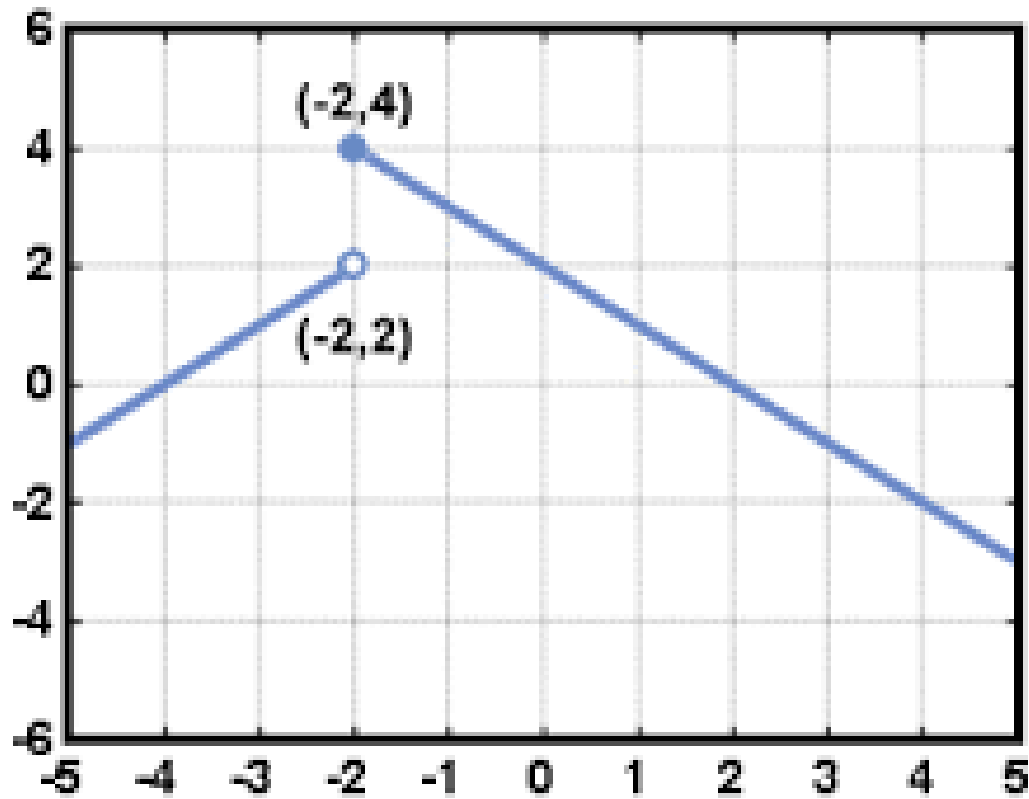
a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$

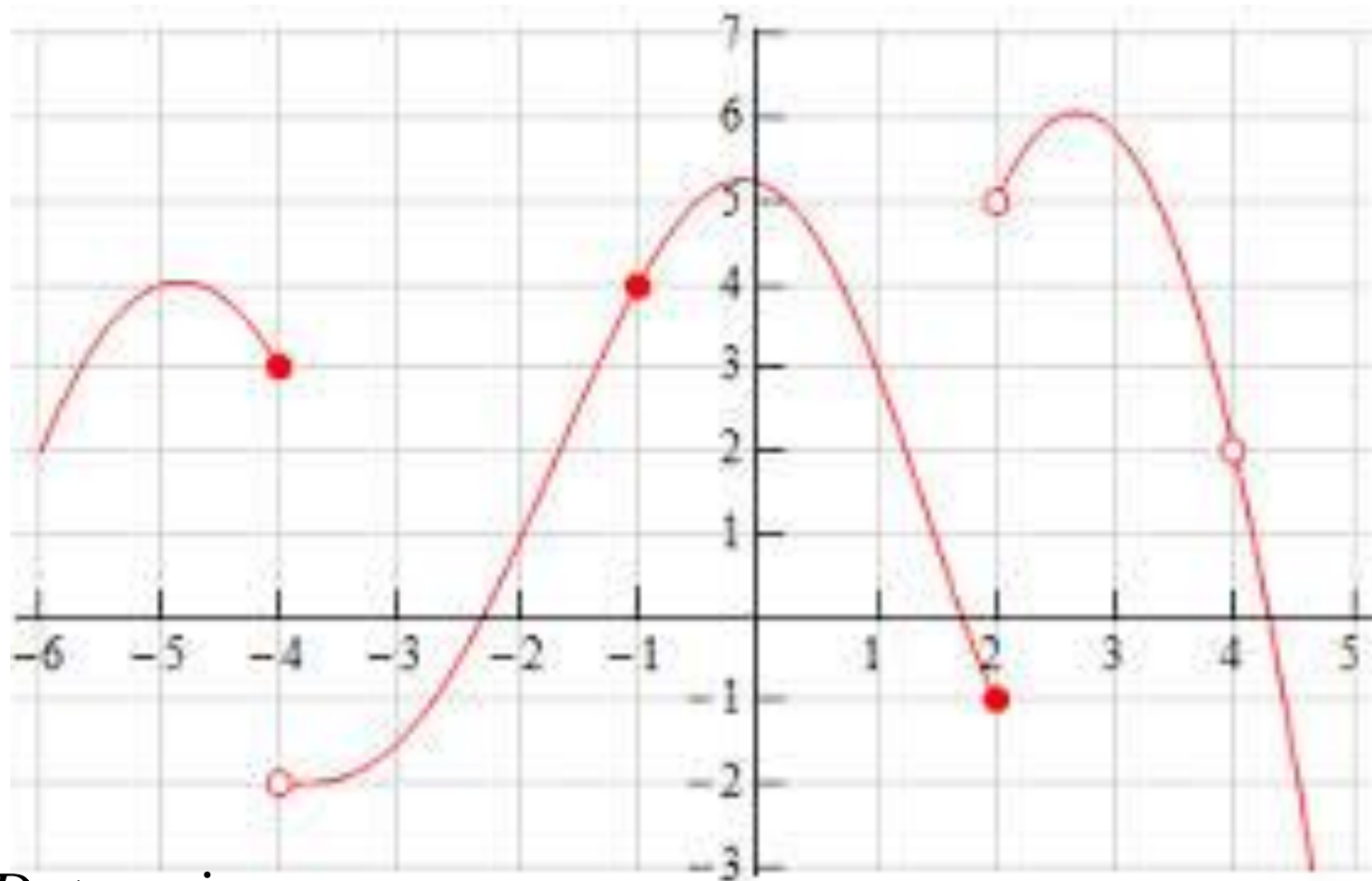
7)



Determine:

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$$

8)



Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) =$

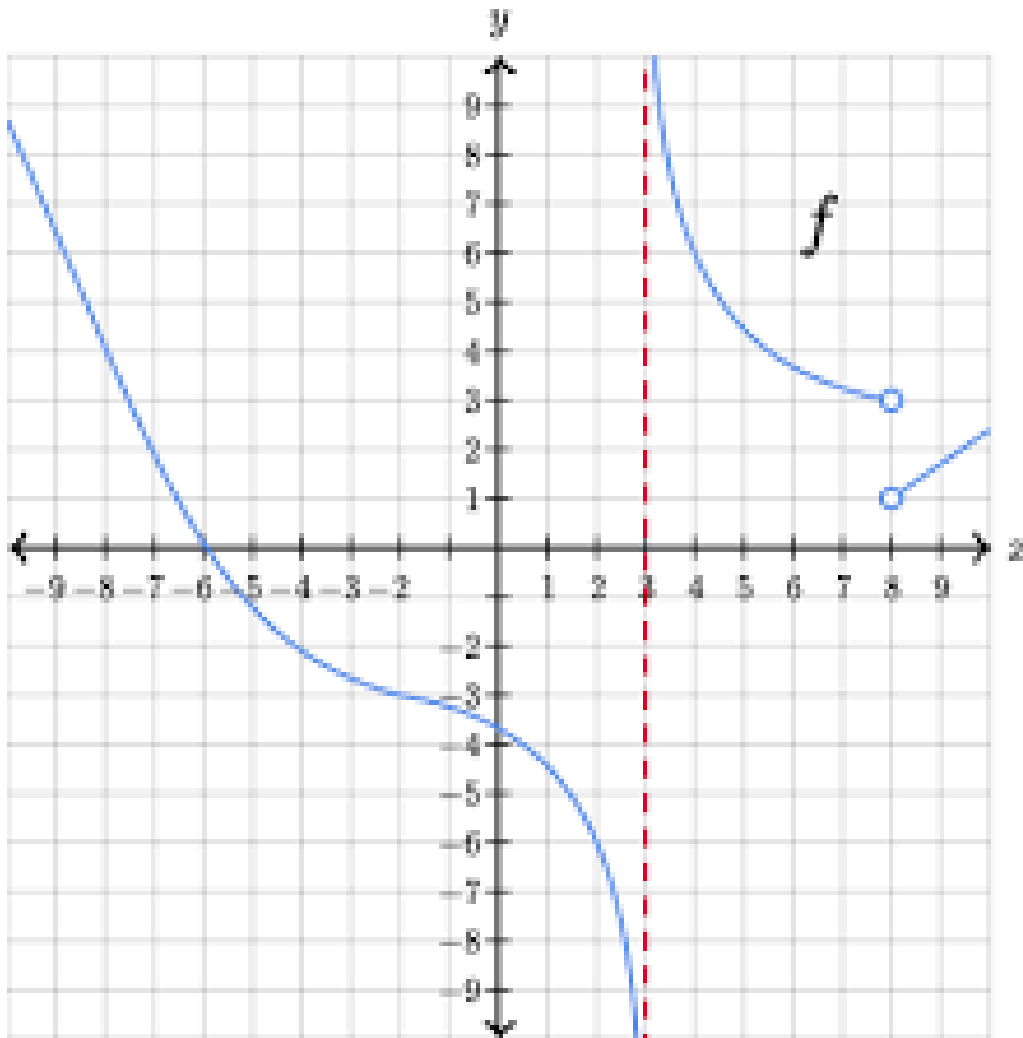
b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

d) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) =$

07/07/2026

9)

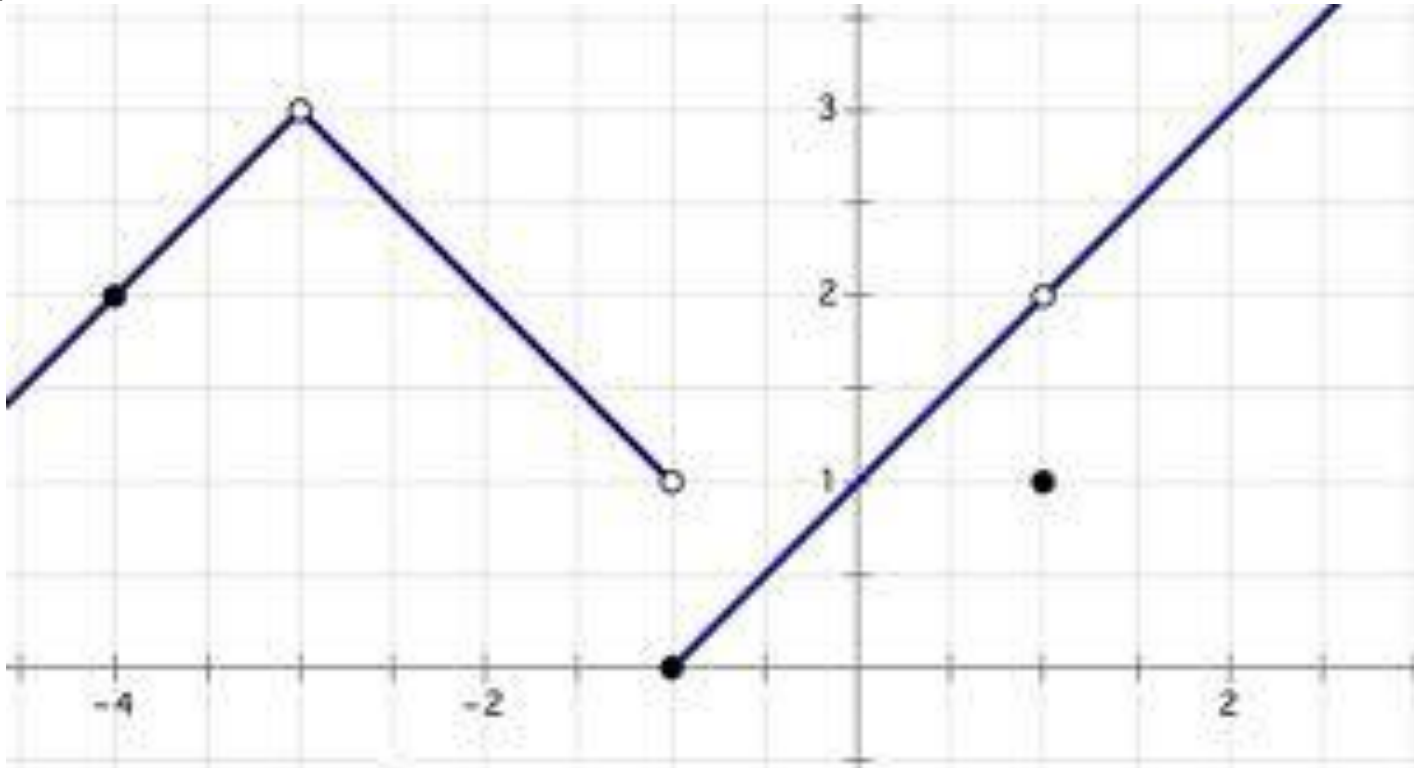


Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$

b) $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) =$

10)



Determine:

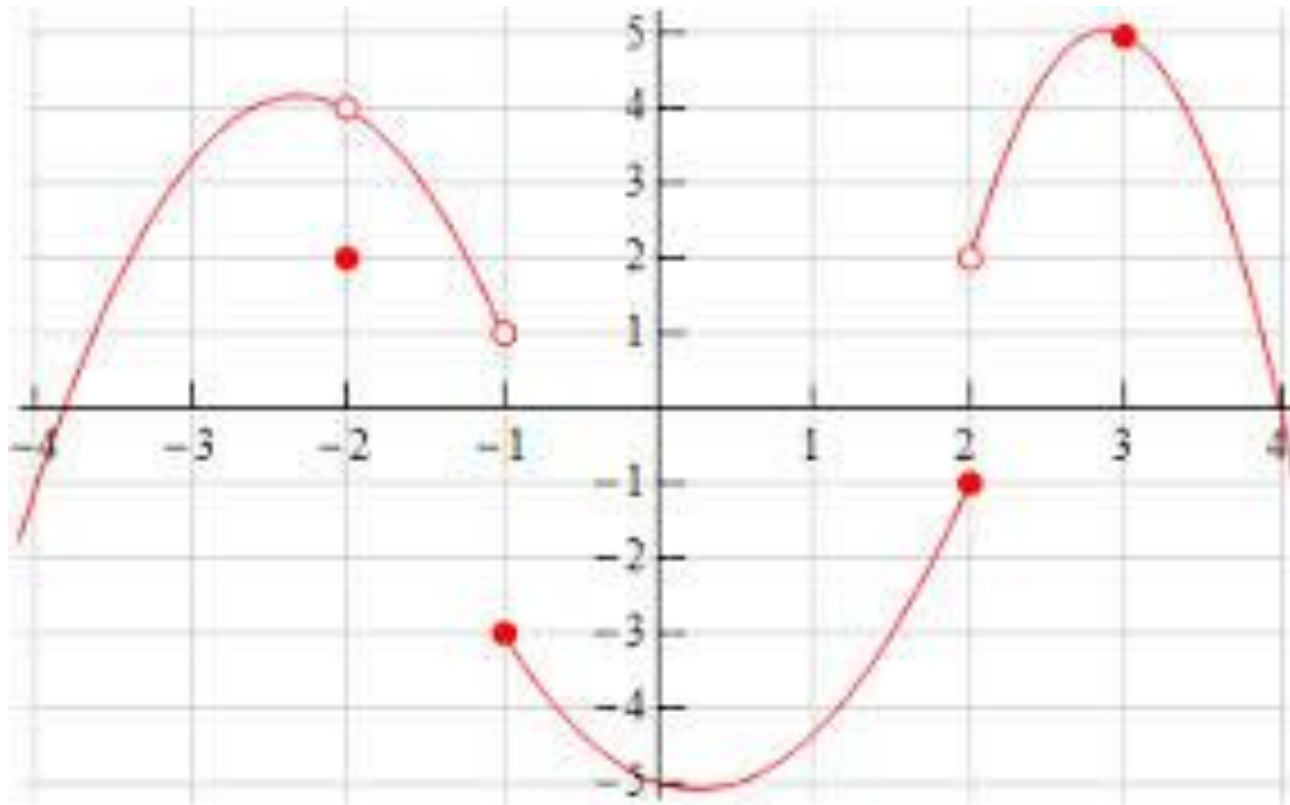
a) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) =$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) =$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$

11)



Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) =$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$