

Centro de massa de um corpo

O centro de massa (CM) de um sistema de partículas é o ponto que se move como se toda a massa estivesse concentrada nele. Sua posição depende da distribuição da massa no espaço e pode ser calculada pelas fórmulas que consideram as coordenadas ponderadas pela massa de cada partícula em cada eixo. No corpo humano, o centro de massa varia conforme a postura.

O CM se distingue do centro de gravidade, que representa o ponto em que a força gravitacional pode ser considerada aplicada. A velocidade e a aceleração do CM também podem ser determinadas por expressões semelhantes.

Além disso, o CM serve para avaliar a estabilidade de um corpo, pois o tombamento ocorre quando sua projeção na base de apoio é ultrapassada.

Centro de massa de um corpo



O sistema é equilibrado exatamente na posição do seu centro de massa.

Centro de massa de um corpo

O centro de massa (CM) é o ponto onde a massa de um corpo ou sistema pode ser considerada concentrada. Calcula-se pela **média ponderada das posições das partículas**, utilizando a fórmula:

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M_{total}}$$

onde cada massa (m_i) é multiplicada pela sua posição (x_i), dividida pela massa total (M_{total}). Para corpos extensos homogêneos, o CM coincide com o centro geométrico.

Observação: O CM é o **ponto em que a massa do corpo pode ser considerada concentrada**, enquanto o **centro de gravidade é onde a força gravitacional atua**. Em **corpos pequenos**, os dois coincidem.

Centro de massa de um corpo

Lembre-se disto: o CM de um sistema de partículas é o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto.

Logo, tomando que um corpo é uma porção limitada de matéria, ou seja, é constituído por determinada quantidade de partículas, ao encontrarmos o CM de um corpo, é possível equilibrá-lo de formas não convencionais, mostrando que nem sempre o CM estará posicionado onde há a presença da maior parte do corpo em si, pois dependerá de como a sua massa estará distribuída no espaço.

Como calcular CM

Como calcular o Centro de Massa (CM)

1. Sistema de Partículas (Discreto):

- Eixo X: $x_{CM} = \frac{m_1x_1+m_2x_2+\dots+m_nx_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}$
- Eixo Y: $y_{CM} = \frac{m_1y_1+m_2y_2+\dots+m_ny_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}$
- Eixo Z (3D): $z_{CM} = \frac{m_1z_1+m_2z_2+\dots+m_nz_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}$
- Nota: O vetor posição é $\vec{R}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M_{total}}$

Como calcular CM

Como calcular o Centro de Massa (CM)

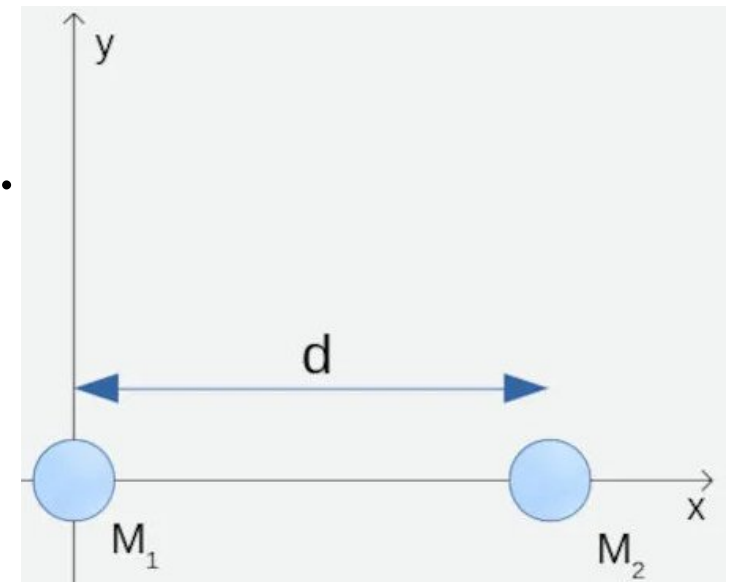
1. Sistema de Partículas (Discreto): Exemplo: Encontre o CM de 02 corpos de massas $M_1 = 2 \text{ kg}$ e $M_2 = 4 \text{ kg}$, separados por uma distância $d = 2 \text{ m}$.

Resposta:

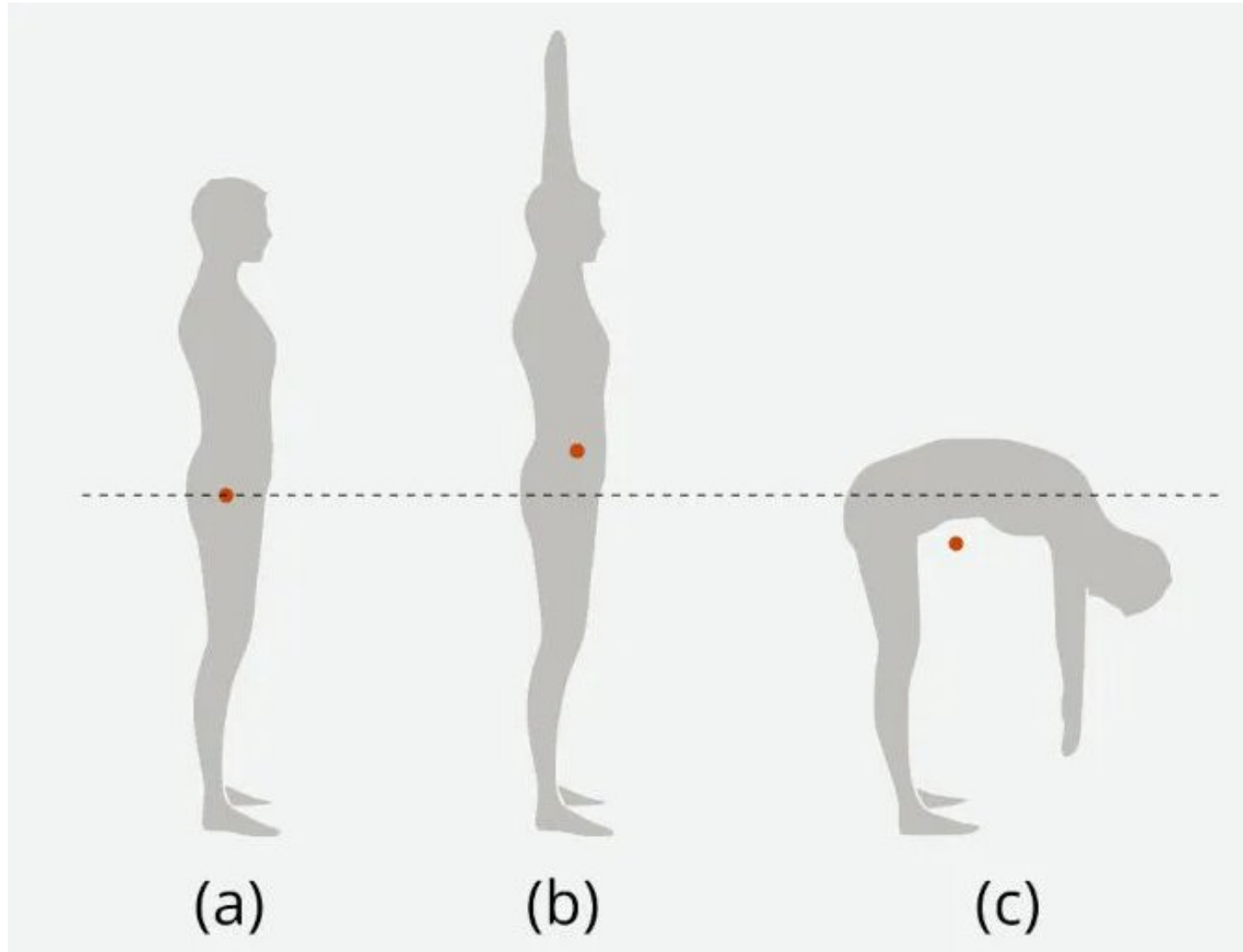
Encontrar a posição do CM do sistema nos eixos x e y.

$$x_{CM} = \frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot 2}{2 + 4} = \frac{8}{6} = 1,33 \text{ m}$$

$$y_{CM} = \frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot 0}{2 + 4} = \frac{0}{6} = 0$$



Como calcular CM



Como calcular CM

O CM do corpo humano dependerá de cada pessoa, de como a sua massa estará distribuída, bem como sua altura, suas curvaturas e posturas. Considerando um ser humano adulto médio de 70 kg, podemos ver na figura (a) que, em uma posição neutra, o centro de massa está localizado na região inguinal. Na figura (b), notamos que, com os braços levantados, o centro de massa sobe levemente para a região do umbigo. Na figura (c), com o corpo curvado e os braços direcionados para baixo, o CM é deslocado para baixo e posicionado numa região em que não há parte do corpo.

Como calcular CM

Como calcular o Centro de Massa (CM)

2. Corpos Extensos (Contínuo):

Para objetos sólidos e contínuos, utiliza-se o cálculo integral para somar as massas infinitesimais:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

Também podemos dizer que como $W = m \cdot g$ e $dW = g \cdot dm$, se a gravidade for constante, o g é cancelado da equação, resultando no como CM:

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{m}, \bar{y} = \frac{\int y dm}{m} \text{ e } \bar{z} = \frac{\int z dm}{m}$$

Velocidade e Aceleração do CM

Velocidade do centro de massa

Dada n partículas de massas m e velocidades v , a velocidade do CM é dada pela fórmula:

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Aceleração do centro de massa

Dada n partículas de massas m e acelerações a , a aceleração do CM é dada pela fórmula:

$$a_{CM} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

CM e estab. de tombamento

Centro de massa e estabilidade de tombamento

Por meio do CM, podemos determinar o ângulo máximo em que um corpo pode se inclinar sem tombar. Uma forma de encontrar esse limite é calculando as coordenadas do CM nos eixos e, em seguida, aplicando conceitos de trigonometria. O tombamento ocorre quando a posição do centro de massa ultrapassa sua projeção na base de apoio.

Dif. entre CM e CG

Diferenças entre centro de massa e centro de gravidade

Centro de massa: é o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto.

Centro de gravidade (ou baricentro) de um corpo: é o ponto onde pode ser considerada a aplicação da força da gravidade de todo o corpo.

Importante de se lembrar: Se as dimensões do corpo forem pequenas, em comparação ao tamanho do planeta Terra, o centro de gravidade coincidirá com o centro de massa.

Centro de Gravidade

Centro de Gravidade (CG)

A atração gravitacional da Terra sobre um corpo (peso) é uma força distribuída por todo o seu volume. O centro de gravidade é o ponto único pelo qual a força resultante do peso (W) atua.

$$\text{Fórmula: } \bar{x} = \frac{\int x dW}{W}, \bar{y} = \frac{\int y dW}{W} \text{ e } \bar{z} = \frac{\int z dW}{W}$$

Conclusão: O CM é um ponto que caracteriza a distribuição de massa de um corpo, sendo independente do CG.

Conceitos Chave

- **Corpos Homogêneos:** Se o corpo possui **densidade uniforme e forma geométrica simétrica**, o CM está localizado no seu centro geométrico (baricentro).
- **Corpos Compostos:** Pode-se dividir uma forma complexa em figuras mais simples (retângulos, círculos), calcular o CM de cada parte, e tratá-las como partículas individuais para achar o CM final.
- **Centro de Massa vs. Centro de Gravidade:** Em **campos gravitacionais uniformes** (como na superfície terrestre), o CM coincide com o centro de gravidade (CG).

O Conceito de Centróide

O Conceito de Centróide (A Simplificação)

Quando a massa específica (ρ , onde $\rho = m/V$, massa do material puro dividido pelo volume ocupado por ele) de um corpo é uniforme (constante em todo o volume), ela cancela-se nas equações de integração. O termo “centro de massa” passa a ser uma propriedade puramente geométrica, chamada de Centróide.

A Importância da Simetria: Se o corpo tiver uma linha ou um plano de simetria, o centróide sempre estará localizado sobre essa linha ou plano.

Explorar a simetria simplifica o problema, pois as coordenadas coincidentes com os eixos de simetria são obtidas diretamente, sem a necessidade de integração.

Cálculo de Centróides

Cálculo de Centróides por Categorias

O cálculo dos centróides depende da forma do corpo envolvido e é dividido em três categorias principais:

- Linhas: Para barras esbeltas ou fios de seção transversal constante.

$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{L}, \bar{y} = \frac{\int y dL}{L} \text{ e } \bar{z} = \frac{\int z dL}{L}$$

- Áreas: Para chapas planas finas. O numerador dessas equações ($\int x dA$) é chamado de primeiro momento de área.

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}, \bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \text{ e } \bar{z} = \frac{\int z dA}{A}$$

- Volumes: Para corpos tridimensionais genéricos.

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V}, \bar{y} = \frac{\int y dV}{V} \text{ e } \bar{z} = \frac{\int z dV}{V}$$

Cálculo de Centróides

Para resolver as integrais, a escolha do elemento diferencial é a parte mais crítica:

- **Ordem do Elemento:** Sempre que possível, escolha um elemento de primeira ordem (ex: uma faixa de área $dA=ldy$, que requer apenas uma integração) em vez de elementos de ordem superior ($dA=dx dy$, que requerem integração dupla).
- **Continuidade:** Escolha um elemento que possa ser integrado de forma contínua por toda a figura, evitando equações que quebrem no meio da área.
- **Coordenadas do Centróide do Elemento:** O braço de alavanca usado na integral deve ser a coordenada do centróide do elemento diferencial e não qualquer parte dele.

Cálculo de Centróides

Aplicação Prática

Problema: Calcular a posição do centróide (distância \bar{y} a partir da base) de uma área triangular com base b e altura h .

Passo 1 (Elemento): Escolhe-se uma faixa horizontal diferencial de área $dA = xdy$ localizada a uma altura y .

Passo 2 (Relação Geométrica): Por semelhança de triângulos, $x/(h-y) = b/h$. Portanto, $dA = [b(h-y)/h]dy$.

Passo 3 (Integração): Sabendo que a Área total $A = bh/2$:

$$\bar{y}A = \int ydA = \int_0^h y \frac{b(h-y)}{h} dy = \frac{bh^2}{6}$$

Cálculo de Centróides

Aplicação Prática

Passo 4 (Resultado): $\bar{y} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}$

Conclusão da demonstração: O centróide de um triângulo situa-se a $1/3$ de sua altura a partir da base.

